Un théorème de type Haefliger définissable

Jean-Marie Lion, Patrick Speissegger

Un théorème de type Haefliger définissable

J.-M. Lion* et P. Speissegger†

18 janvier 2007

À José Manuel Aroca, pour ses soixante ans

Résumé

Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ *une sous-variété définissable dans une structure o-minimale* $\mathcal{A}$ *et soit* $\omega \in \Lambda(M)$ *une 1-forme différentielle* $\mathcal{A}$*-définissable et qui définit un feuilletage de codimension un sur* M*. Nous montrons qu'il existe un recouvrement fini de* M *par des ouverts* $\mathcal{A}$*-définissables* $M_1, \ldots, M_r$ *qui vérifient la propriété suivante : pour chaque* i*, tout lacet* C^1 *inclus dans* M_i *est tangent à* $\ker(\omega)$ *en un point.*

Abstract

Let $\mathcal{A}$ *be an o-minimal expansion of the real field,* M *a submanifold of* R^n *and* ω *a differentiable 1-form on* M*. We assume that* M *and* ω *are definable in* $\mathcal{A}$ *and* ω *defines a foliation on* M *of codimension one. Then there are definable, open subsets* M_i *of* M*, for* $i = 1, \ldots, r$*, such that every* C^1 *loop contained in* M_i *is tangent to* $\ker(\omega)$ *at some point.*

Introduction

Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété différentielle de classe $C^k, k \geq 2$, de dimension m, connexe et $\omega \in \Lambda^k(M)$ une 1-forme différentielle de clase C^k définie sur M. On suppose que ω est *non singulière et intégrable* : en tout point x de M

$$\omega(x) \neq 0 \text{ et } \omega \wedge d\omega(x) = 0.$$

D'après le théorème de Frobenius, pour tout point de M il existe une carte locale de M centrée en x dans laquelle le champ d'hyperplans $\ker(\omega)$ est le champ

*jean-marie.lion@univ-rennes1.fr, IRMAR, UMR CNRS 6625, UFR Mathématiques, Université de Rennes I, 35042 Rennes cedex, France

†speisseg@math.mcmaster.ca, Department of Mathematics & Statistics, McMaster University, 1280 Main Street West, Hamilton, Ontario L8S 4K1, Canada, soutenu par le Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada

$\ker(dx_m)$. Par conséquent, la forme ω définie sur M un *feuilletage de codimension un* noté $\mathcal{F}$. Par tout point x de M passe une unique *feuille* V de $\mathcal{F}$. C'est une hypersurface de classe C^k, connexe, immergée injectivement dans M, tangente au champ d'hyperplans $x \in M \mapsto \ker(\omega)(x)$ et maximale pour ces propriétés (voir [CLN], [G1] ou [H2] pour une introduction à la théorie des feuilletages). Observons que si la condition d'intégrabilité de Frobenius n'est pas vérifiée alors il n'y aurait pas de feuilletage d'une part et il existerait nécessairement des lacets transverses au champ $\ker(\omega)$. Ce dernier point est une conséquence immédiate du théorème de Darboux sur les modèles locaux des formes différentielles (voir par exemple [G2]).

Les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$ ne sont pas toujours fermées ou plongées proprement dans M et elles peuvent être denses. Cependant si M est une variété analytique simplement connexe et ω est analytique, alors, d'après un théorème de A. Haefliger [H1] (voir aussi [MR]), le feuilletage *n'admet pas de transversale fermée* (ceci signifie qu'il n'existe pas dans M de lacet de classe C^1 et transverse au feuilletage) et toute feuille est une hypersurface analytique fermée de M qui sépare M en deux composantes connexes. En particulier toute feuille est de *Rolle* : tout lacet différentiable qui la rencontre est tangent au feuilletage en un point (voir [Kh] et [MR]). Si la simple connexité de M joue un rôle important dans la preuve du théorème de A. Haefliger, l'analycité de M et celle de ω sont aussi essentielles. Elles garantissent l'analycité des holonomies. Un exemple de G. Reeb [E] montre qu'on ne peut s'affranchir totalement des hypothèses d'analycité et de simple connexité (voir [CLN] ou [G1]).

Dans [R], C.A. Roche conjecture qu'il est possible de recouvrir M par un nombre fini d'ouverts $M_1, \ldots, M_s$ tels que sur chaque M_i la forme ω induit un feuilletage $\mathcal{F}_i$ dynamiquement simple : il n'admet pas de transversale fermée et toute feuille est une hypersurface fermée de M_i qui sépare M_i en deux composantes connexes.

L'objet de cet article est de donner une réponse positive à cette conjecture dans un cadre assez général, le cadre o-minimal [D] (voir aussi [DM] ou [Te]).

Théorème 1 *Si M et ω sont définissables dans une structure o-minimale $\mathcal{A}$, il existe un recouvrement fini $M_1, \ldots, M_s$ de M par des ouverts $\mathcal{A}$-définissables tel que la forme ω induit sur chaque M_i un feuilletage $\mathcal{F}_i$ dynamiquement simple : il n'admet pas de transversale fermée et toute feuille est une hypersurface fermée de M_i qui sépare M_i en deux composantes connexes.*

D'après les résultats de [Ch] adaptés au cadre o-minimal, pour chaque i le feuilletage $\mathcal{F}_i$ est *presque* une C^k-fibration triviale : c'est le cas dans les composantes connexes de $M_i \setminus Z_i$ où Z_i est la réunion d'un nombre fini de feuilles de $\mathcal{F}_i$. De plus, d'après [S], les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_i$ sont définissables dans une structure o-minimale, la clôture pfaffienne de $\mathcal{A}$.

Notre théorème est une généralisation du théorème 1 de [L] dans laquelle on s'affranchit de toute condition d'analycité. On sait que les techniques de désingularisation des ensembles analytiques (présentées par exemple dans l'article de J.M. Aroca, H. Hironaka et J.L. Vicente [AHV]) appliquées à l'étude des feuilletages analytiques singuliers de codimension un et à celle des champs de vecteurs analytiques peuvent se révéler très fructueuses (voir par exemple [Ca] ou [P]). Ici, il faudra se résoudre à des méthodes plus naïves de nature essentiellement topologique et différentielle : l'idée principale, déja présente dans [L], est de construire un recouvrement fini de M par des ouverts M_i sur chacun desquels la forme ω induit un feuilletage dont les feuilles sont des graphes d'applications.

Après une présentation des structures o-minimales (partie 1) nous donnerons trois observations topologiques et une proposition utiles à la preuve du théorème (partie 2). Ensuite (partie 3) nous énoncerons une proposition qui permet de recouvrir l'espace en ouverts sur lesquels la dynamique du feuilletage se révèlera simple ou au moins contrôlée par la dynamique de feuilletages induits sur certaines parties de leurs bords. La preuve de cette proposition, purement technique, sera donnée en annexe (partie 5). Elle se conclut par un argument de transversalité de Thom [Th]. Dans la partie 3 on donnera aussi un exemple qui illustre la nécessité du contrôle de la dynamique au bord. La partie 4 sera consacrée à la preuve du théorème.

1 Les structures o-minimales (voir [D] ou [DM])

Définition 1 On appelle *structure* une famille $\mathcal{A} = \cup_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{A}_n$ de sous-ensembles des espaces euclidiens $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- si $X, Y \in \mathcal{A}_n$ alors $X \cap Y$, $X \cup Y$ et $X \setminus Y$ appartiennent à $\mathcal{A}_n$
- si $X \in \mathcal{A}_n$ et $Y \in \mathcal{A}_m$ alors $X \times Y \in \mathcal{A}_{n+m}$
- $Z \in \mathcal{A}_{n+m}$ alors $\{x \in \mathbf{R}^n | \exists y \in \mathbf{R}^m, (x,y) \in Z\} \in \mathcal{A}_n$
- si $P \in \mathbf{R}[x_1,\ldots,x_n]$ alors $\{P > 0\} \in \mathcal{A}_n$.

Définition 2 Suivant la terminologie introduite par L. van den Dries [D] la structure $\mathcal{A}$ est dite *o-minimale* si les éléments de $\mathcal{A}_1$ sont les unions finies d'intervalles et de points.

D'après le théorème de Tarski-Seidenberg (voir par exemple [BCR] ou [BR]) les semi-algébriques forment une structure o-minimale. S. Łojasiewicz montre que les semi-analytiques possèdent de nombreuses propriétés de régularité (stratifications de Whitney, triangulations, ordre de contact, voir [Ł]) mais ils ne forment pas une structure o-minimale. Cependant d'après un théorème de A. Gabrielov [Ga] les sous-ensembles semi-analytiques relativement compacts en engendrent une. On connaît depuis la fin des années 80 de nombreux autres exemples de structures o-minimales (voir par exemple [DMM], [Wi], [RSW], [RSS]). L'article [RSW] montre en particulier qu'il n'existe pas une structure o-minimale maximale qui engloberait toutes les autres et que certaines structures o-minimales sont très éloignés des ensembles analytiques.

Considérons une structure o-minimale $\mathcal{A}$. Les éléments des $\mathcal{A}_n$ sont appelés *ensembles $\mathcal{A}$-définissables.* Une fonction ou une application est dite *$\mathcal{A}$-définissable* si son graphe est $\mathcal{A}$-définissable. Une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ est dite *$\mathcal{A}$-définissable* si c'est un élément de $\mathcal{A}_n$. Une forme différentielle est dite *$\mathcal{A}$-définissable* si son graphe est $\mathcal{A}$-définissable. Les grassmaniennes $\mathcal{G}_n^p$ des p-plans de $\mathbf{R}^n$ et leur réunion $\mathcal{G}_n$ sont des sous-ensembles semi algébriques. Elles sont donc $\mathcal{A}$-définissables. Les trois propositions suivantes récapitulent des propriétés élémentaires mais fondamentales des structures o-minimales.

Proposition 1 *(***Propriétés ensemblistes***)*

- *La composée d'applications $\mathcal{A}$-définissables l'est aussi.*
- *Si $f : X \to \mathbf{R}$ est $\mathcal{A}$-définissable alors $\{f = 0\}$, $\{f > 0\}$ et $\{f < 0\}$ le sont aussi.*
- *Si $f : X \to \mathbf{R}^m$ et $Y \subset \mathbf{R}^m$ sont $\mathcal{A}$-définissables alors $f^{-1}(Y)$ l'est aussi.*

Proposition 2 *(***Propriétés topologiques***)*

- *Si X est $\mathcal{A}$-définissable alors son adhérence $\overline{X}$ et son intérieur $\mathrm{Int}(X)$ le sont aussi.*

Proposition 3 *(***Propriétés différentielles***)*

- *Les dérivées partielles d'une application différentiable et $\mathcal{A}$-définissable sont $\mathcal{A}$-définissables.*
- *Si X est une sous-varitété de dimension p de $\mathbf{R}^n$, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable alors son fibré tangent est aussi $\mathcal{A}$-définissable.*
- *Si $\alpha : X \to \mathcal{G}_n^p$ et $\beta : X \to \mathcal{G}_n^q$ sont deux applications $\mathcal{A}$-définissables alors les ensembles $\{\alpha \subset \beta\}$ et $\{\dim(\alpha \cap \beta) = d\}, d = 1, \ldots, n$ ainsi que l'application $\alpha \cap \beta$ à valeurs dans $\mathcal{G}_n$ le sont aussi.*
- *Si X est une sous-varitété de $\mathbf{R}^n$ $\mathcal{A}$-définissable et $\omega \in \Lambda(X)$ est une 1-forme différentielle $\mathcal{A}$-définissable alors l'application $\ker(\omega)$ l'est aussi.*

Les structures o-minimales possèdent la propriété de finitude uniforme suivante (voir [D], [DM]).

Proposition 4 *Si $X \subset \mathbf{R}^n$ est $\mathcal{A}$-définissable il existe un entier N qui majore le nombre de composantes connexes de $X \cap E$ pour tout sous-espace affine E de $\mathbf{R}^n$.*

Définition 3 Soit $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On définit par récurrence sur n les *cylindres de* $\mathbf{R}^n$ *de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissables.* L'unique cylindre de $\mathbf{R}^0 = \{0\}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable est $\mathbf{R}^0$ lui même. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et supposons avoir défini les cylindres de $\mathbf{R}^{n-1}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissables. Un sous-ensemble C de $\mathbf{R}^n$ est un *cylindre de* $\mathbf{R}^n$ *de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable* si les conditions suivantes sont vérifiées.

- L'ensemble C est une sous-variété différentielle de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable.
- Il existe un cylindre D de $\mathbf{R}^{n-1}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable tel que soit C est le graphe d'une fonction de D dans $\mathbf{R}$, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable, soit
$$C = \{(x,y) : x \in D, \phi(x) < y < \psi(x)\}$$
ou
$$C = \{(x,y) : x \in D, \phi(x) < y\}$$
ou
$$C = \{(x,y) : x \in D, y < \psi(x)\}$$
avec ϕ et ψ des fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbf{R}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissables. Le cylindre D est appelé *base* de C.

On déduit de cette définition les propositions suivantes.

Proposition 5 *Si C est un cylindre de $\mathbf{R}^n$, de classe C^k, $\mathcal{A}$-définissable et de base D et si D' un cylindre de $\mathbf{R}^{n-1}$ de classe C^k, $\mathcal{A}$-définissable et inclus dans D alors $C \cap (D' \times \mathbf{R})$ est un cylindre de $\mathbf{R}^n$, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable.*

Proposition 6 *Si C est un cylindre de dimension d de $\mathbf{R}^n$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable alors quitte à permuter les coordonnées, le cylindre C est le graphe d'une application définie sur un cylindre ouvert D' de $\mathbf{R}^d$, à valeurs dans $\mathbf{R}^{n-d}$, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable. De plus il existe un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d$ dans D', de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable. Ainsi C est connexe et il existe un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d$ dans C, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable.*

Définition 4 Soit $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On définit par récurrence sur n les *décompositions cylindriques de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissables.* L'unique *décomposition cylindrique de* $\mathbf{R}^0 = \{0\}$ *de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable* est $\mathbf{R}^0$ lui même. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et supposons avoir défini les décompositions cylindriques de $\mathbf{R}^{n-1}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissables. Une famille finie $C_1, \ldots, C_r$ de sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ est une *décomposition cylindrique de* $\mathbf{R}^n$ *de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable* si les conditions suivantes sont vérifiées.

- La famille $C_1, \ldots, C_r$ est une partition de $\mathbf{R}^n$ en cylindres de $\mathbf{R}^n$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissables.

– Les bases des C_i forment une décomposition cylindrique de $\mathbf{R}^{n-1}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable.

Les structures o-minimales possèdent la propriété de décomposition cylindrique suivante (voir [D], [DM]).

Proposition 7 *Soient $X_1, \ldots, X_d$ des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{A}$-définissables et pour chaque $i = 1, \ldots, d$ une application $\phi_i : X_i \to \mathbf{R}^{m_i}$ $\mathcal{A}$-définissable. Soit $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Il existe une décomposition cylindrique $C_1, \ldots, C_r$ de $\mathbf{R}^n$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable qui vérifie les propriétés suivantes.*

– *Chaque X_i est une réunion de C_j.*
– *Si $C_j \subset X_i$ alors la restriction de ϕ_i à C_j est une application différentiable de classe C^k et de rang constant.*

Définition 5 La décomposition cylindrique obtenue dans la proposition 7 est dite *adaptée aux X_i et aux ϕ_i*. Pour chaque i, la partition de X_i donnée par la proposition s'appelle *décomposition cylindrique de X_i*.

La proposition 7 permet de faire des stratifications de Whitney [Wh] adaptées à une famille finie d'ensembles définissables (voir [D], [DM]) et d'expliquer plus finement l'adhérence d'un ensemble définissable que ne le fait la proposition 2.

Toute sous-variété de $\mathbf{R}^n$ qui est $\mathcal{A}$-définissable admet un recouvrement fini par des cartes $\mathcal{A}$-définissables. Plus précisément, on démontre à partir des propositions précédentes :

Proposition 8 *Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété différentielle de classe C^k, de dimension m et $\mathcal{A}$-définissable. Il existe des sous-ensembles $M_1, \ldots, M_r \subset M$, $\mathcal{A}$-définissables et tels que*

– *$M = M_1 \cup \ldots \cup M_r$*
– *Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, quitte à faire une permutation σ_i des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, M_i est un cylindre de $\mathbf{R}^n$ de dimension m, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable.*

Le principe de la preuve de cette proposition sera repris pour établir la proposition 10.

Preuve Si $I = (i_1 < \ldots < i_{m)})$ avec $i_1, \ldots, i_m \in \{1, .., n\}$ on note $M_{i_1,\ldots,i_m}$ l'ensemble des $x \in M$ où la restriction à M de la projection $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ définie par

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$$

est de rang m. Les $M_{i_1,\ldots,i_m}$ sont des sous-ensembles de M, ouverts pour la topologie induite et $\mathcal{A}$-définissables d'après la proposition 3. Leur réunion est égale à

M. On peut donc supposer que M est l'un d'eux, $M = M_{1,\ldots,m}$ par exemple. On pose $\pi = \pi_{1,\ldots,m}$. La restriction de π à M est de rang m.

D'après la proposition 7 on sait que M admet une décomposition cylindrique de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable. Considérons donc $C \subset M$ un cylindre de $\mathbf{R}^n$ de dimension $d \leq m$, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable. Il suffit de montrer qu'il existe $Z \subset C$, de dimension au plus $d-1$, $\mathcal{A}$-définissable et des sous-ensemble $M_1, \ldots, M_r$ de M, $\mathcal{A}$-définissables et tels que

- $C \setminus Z \subset M_1 \cup \ldots \cup M_r$
- Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, M_i est un cylindre de $\mathbf{R}^n$ de dimension m, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable.

Si $d = m$ la conclusion est immédiate. On suppose $d < m$. Puisque la restriction de π à M est de rang m, d'après la proposition 6, quitte à permuter les coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$ le cylindre C est le graphe d'une application de classe C^k, $\mathcal{A}$-définissable et définie sur un cylindre de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable de $\mathbf{R}^d$.

Si $x = (x; x_{d+1}, \ldots, x_n) \in C$ on pose

$$\begin{aligned}\delta(x) = \max\{ \ & \delta : \forall (\delta_{d+1}, \ldots, \delta_m), \\ & \sup|\delta_i| < \delta \Rightarrow \exists ! (\varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_n), \sup|\varepsilon_j| < \sqrt{\delta}, \\ & \qquad\qquad {\scriptstyle (x'; x_{d+1}+\delta_{d+1}, \ldots, x_m+\delta_m, x_{m+1}+\varepsilon_{m+1}, \ldots, x_n+\varepsilon_n)} \in M\}.\end{aligned}$$

D'après la proposition 1 la fonction δ est $\mathcal{A}$-définissable. Puisque la restriction de π à M est de rang m, la fonction δ est strictement positive en tout point de C. D'après la proposition 7 il existe des cylindres $C_1, \ldots, C_r \subset C$, de dimension d, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissables tels que

- $C \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_r)$ est de dimension au plus $d-1$
- La restriction de δ à chaque C_i est de classe C^k et $\mathcal{A}$-définisssable.

Si $i = 1, \ldots, r$ on pose

$$\begin{aligned}M_i = \{ & (x'; x_{d+1}+\delta_{d+1}, \ldots, x_m+\delta_m, x_{m+1}+\varepsilon_{m+1}, \ldots, x_n+\varepsilon_n) \in M : \\ & \qquad\qquad x \in C_i, \sup|\delta_i| < \delta(x), \sup|\varepsilon_j| < \sqrt{\delta(x)}\}.\end{aligned}$$

Par construction les M_i sont des cylindres de dimension m, de classe C^k, inclus dans M et $\mathcal{A}$-définissables. L'ensemble

$$Z = C \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_r)$$

est un inclus dans C, $\mathcal{A}$-définissable et de dimension au plus $d-1$. •

2 Observations et proposition topologiques

- Soit $\rho : \tilde{V} \to M'$ un revêtement de base M' simplement connexe et avec l'espace total $\tilde{V}$ connexe. Alors ρ est un homéomorphisme (voir [DNF] ou [M]).

- Dans $\mathbf{R}^m$ une hypersurface fermée sépare $\mathbf{R}^m$ en deux composantes connexes exactement (voir [DNF] ou [M]).

- Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un d'une variété M un associé à une 1-forme différentielle ω, non singulière et intégrable. Si une feuille V de $\mathcal{F}$ est une sous-variété fermée de M qui disconnecte M alors V est une feuille de Rolle. La réciproque est fausse : si V est une feuille de Rolle alors c'est une sous-variété fermée de M mais elle ne disconnecte pas toujours M. En revanche, si M est difféomorphe à $\mathbf{R}^m$ il est équivalent de dire que V est de Rolle et que V sépare en deux composantes connexes (voir [Kh] ou [MR]).

Outre ces trois observations topologiques la proposition générale qui suit est utile à la preuve du théorème. C'est un corollaire d'un lemme de Morse à paramètres en classe C^k qui est dû à S. López de Medrano [LdM] et Kuiper [Ku]. Ici, comme dans tout le papier $k \geq 2$.

Proposition 9 *Soit $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ et soit g une fonction de classe C^k définie au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ et telle que $g(0) = 0$ et $dg(0) \neq 0$. Il existe alors une fonction G d'une variable, de classe C^{k-1}, telle que $G(0) = 0$ et $dG(0) \neq 0$ et des coordonnées $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de classe C^{k-1} au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ telles que $f = y_1^2 + \ldots + y_n^2$ et $g = G(y_n)$.*

Preuve Quitte à faire un changement de coordonnées orthogonales (donc qui laisse invariant l'expression de f) on peut supposer que $dg(0) = \lambda dx_n$. Posons $z_n = \frac{1}{\lambda} g$. D'après le théorème des fonctions implicites il existe une fonction h de classe C^k définie au voisinage de l'origine telle que $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, z_n)$ et $dh(0) = dz_n$. Par conséquent il existe une fonction ε de classe C^k et dont le 2-jet à l'origine est nul telle que $f = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + z_n^2 + \varepsilon(x_1, \ldots, x_{n-1}, z_n)$. D'après le lemme de Morse à paramètre en classe C^k de López de Medrano [LdM] appliqué à la fonction $F = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \varepsilon(x_1, \ldots, x_{n-1}, z_n)$ il existe des coordonnées $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ de classe C^{k-1} définies au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^{n-1}$ et une fonction α de classe C^k définie au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}$ et dont le 2-jet à l'origine est nul telles que $F = y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 + \alpha(z_n)$. D'après le lemme de Morse (version de Kuiper [Ku]) en classe C^k appliqué à $z_n^2 + \alpha(z_n)$ il existe une fonction G d'une variable, de classe C^{k-1}, telle que $G(0) = 0$ et $dG(0) \neq 0$ vérifiant $z_n^2 + \alpha(z_n) = y_n^2$ et $\lambda z_n = G(y_n)$. •

Cette proposition implique que si $\varepsilon > 0$ est petit alors pour tout $t \in \mathbf{R}$ l'ensemble $\{f < \varepsilon, g = t\}$, s'il n'est pas vide, est connexe, coupe l'axe vertical $\{y_1 = \ldots = y_n = 0\}$ transversalement en un point exactement et sépare la boule ouverte $\{f < \varepsilon\}$ en deux composantes connexes exactement. Dans le cas où g est l'intégrale première locale d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension un définie au voisinage de l'origine, ceci implique que si V est une feuille de Rolle de $\mathcal{F}$ alors $V \cap \{f < \varepsilon\}$ est vide ou connexe.

3 Recouvrement d'un ouvert relativement compact M de $\mathbf{R}^m$ adapté à une forme différentielle définie au voisinage de $\overline{M} \setminus \{0\}$

On s'intéresse dans la proposition qui suit au cas où la 1-forme ω est définie sur un ouvert M relativement compact de $\mathbf{R}^m$ et admet un prolongement intégrable, non singulier et $\mathcal{A}$-définissable au voisinage de $\overline{M}$ sauf peut-être en un point. La proposition affirme qu'on peut alors recouvrir l'espace M en ouverts sur lesquels la dynamique du feuilletage se révèlera simple. Sa démonstration, purement technique, sera donnée en annexe

Proposition 10 *Soit M un ouvert relativement compact de $\mathbf{R}^m$, $\mathcal{A}$-définissable, de classe C^k et ω une 1-forme différentielle à coefficients $\mathcal{A}$-définissables, de classe C^k, définie sur M et au voisinage de $\overline{M} \setminus \{0\}$, non singulière et intégrable. Il existe une constante $K > 0$ et des ouverts $U_1, \ldots, U_s$ vérifiant les propriétés suivantes.*

- *i - L'ouvert M est la réunion des ouverts $U_1, \ldots, U_s$.*
- *ii - Pour chaque $i \in \{1, \ldots, s\}$ il existe des coordonnées linéaires dans lesquelles U_i est un cylindre $\mathcal{A}$-définissable, de classe C^k,*

$$U_i = \{(x,y) : x \in U'_i, \phi_i(x) < y < \psi_i(x)\}.$$

- *iii - Pour tout $x \in U_i$ l'hyperplan $\ker(\omega)(x)$ est transverse à l'axe vertical et c'est le graphe d'une application linéaire K-lipschitzienne.*
- *iv - Le champ $x \mapsto \ker(\omega)(x)$ est soit partout transverse soit partout tangent au bas $B_i = \{(x, \phi_i(x)) : x \in U'_i\}$ (respectivement au haut $H_i = \{(x, \psi_i(x)) : x \in U'_i\}$) du cylindre U_i.*

Si $i \in \{1, \ldots, s\}$ la dynamique du feuilletage $\mathcal{F}_{U_i}$ induit par ω sur U_i n'est pas nécessairement simple comme le montre l'exemple suivant construit à partir du feuilletage de Reeb. Cependant on verra dans la preuve du théorème principal que la dynamique de $\mathcal{F}_{U_i}$ est simple dès que celles des feuilletages induits par ω sur B_i et H_i le sont.

Exemple Partons de l'exemple de Reeb [ER] (voir aussi [CLN] ou[G1]) dont on donne une construction *o-minimale* à l'aide d'une 1-forme ω de classe C^∞ et dont les coefficients sont définissables dans la structure o-minimale $\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}$ engendrée par les fonctions analytiques restreintes et l'exponentielle [DMM].

Soit $\mathbf{S}^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbf{C}^2$. On pose $z_1 = \rho_1 \exp(i\theta_1)$, $z_2 = \rho_2 \exp(i\theta_2)$. On a donc $\mathbf{S}^3 = \{\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1\}$ et donc $d\rho_1^2 + d\rho_2^2 = 0$ en restriction à $\mathbf{S}^3$ et $\mathbf{S}^3 \subset \{\rho_1^2 \leq 1/2 \text{ ou } \rho_2^2 \leq 1/2\}$. On considère la fonction de recollement suivante $\mu(t) = \mathbf{1}_{]0,+\infty=(t)} \exp(-1/t)$. Elle est définissable dans $\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}$. Soit $\tilde{\omega}$ la 1-forme différentielle définie sur $\mathbf{S}^3$ par

$$\tilde{\omega} = \mu(1/2 - \rho_2^2)d\theta_1 + \mu(1/2 - \rho_1^2)d\theta_2 + d\rho_2^2.$$

Elle est aussi définissable dans $\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}$. De plus

– si $\rho_2^2 \leq 1/2$ alors $\rho_1^2 \geq 1/2$ et $\tilde{\omega} = \mu(1/2 - \rho_2^2)d\theta_1 + d\rho_2^2$
– si $\rho_1^2 \leq 1/2$ alors $\rho_2^2 \geq 1/2$ et $\tilde{\omega} = \mu(1/2 - \rho_1^2)d\theta_2 - d\rho_1^2$.

On a donc bien $\tilde{\omega} \wedge d\tilde{\omega} \equiv 0$ et $\tilde{\omega}$ définit un feuilletage $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}}$ sur $\mathbf{S}^3$. On remarque que le lacet $\tilde{C} = \{\rho_2^2 = 0\}$ est transverse à ce feuilletage qui est donc un feuilletage de $\mathbf{R}^3$ qui admet des transversales fermées. On considère le champ de vecteurs $\tilde{X}$ *orthogonal à* $\tilde{\omega}$ défini sur $\mathbf{S}^3$ par

$$\tilde{X} = \mu(1/2 - \rho_2^2)\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \mu(1/2 - \rho_1^2)\frac{\partial}{\partial\theta_2} + 2\rho_2\frac{\partial}{\partial\rho_2}.$$

Il est aussi égal à

$$\tilde{X} = \mu(1/2 - \rho_2^2)\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \mu(\rho_2^2 - 1/2)\frac{\partial}{\partial\theta_2} + 2\rho_2\frac{\partial}{\partial\rho_2}.$$

Il est donc définissable dans $\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}$, il est sans zéro et puisque ce champ ne dépend que de ρ_2, d'après [S], son flot $\tilde{\phi} : \mathbf{S}^3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{S}^3$ est une application définissable dans une structure o-minimale $\widehat{\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}}$ appelée clôture pfaffienne de $\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}$.

Par projection stéréographique de pôle nord on obtient un feuilletage $\mathcal{F}_{\overline{\omega}}$ de $\mathbf{R}^3$ défini à partir d'une forme $\overline{\omega}$ de classe C^∞ et définissable dans la strucure o-minimale $\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}$. Le feuilletage admet des tranversales fermées car le cercle C image par la projection stéréographique du lacet $\tilde{C}$ est transverse au feuilletage $\mathcal{F}_{\overline{\omega}}$. Décrivons un peu la géométrie de ce feuilletage. Il est invariant par rotation autour de l'axe $\{x_1 = x_2 = 0\}$. L'une des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_{\overline{\omega}}$ est un tore $\mathbf{T}^2$. Il est dans l'adhérence de toutes les autres qui ne sont donc pas fermées dans $\mathbf{R}^3$.

On note $\overline{X}$ l'image de $\tilde{X}$ par la projection stéréographique. Il est définissable dans $\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}$ et il est sans zéro. Son flot $\overline{\phi}$ est l'image par la projection stéréographique du flot $\tilde{\phi}$. Il est donc définissable dans la clôture pfaffienne de $\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}$. Contrairement au champ $\tilde{X}$, le champ $\overline{X}$ n'est pas complet puisque par la projection stéréographique le pôle nord est envoyé à l'infini.

On étend trivialement la forme $\overline{\omega}$ en une forme $\breve{\omega}$ de $\mathbf{R}^4$ définissable dans la clôture pfaffienne $\widehat{\mathbf{R}_{\mathrm{an,exp}}}$ et qui définit un feuilletage $\mathcal{F}_{\breve{\omega}}$ de $\mathbf{R}^4$. Les feuilles de $\mathcal{F}_{\breve{\omega}}$ sont les produits $V \times \mathbf{R}$ des feuilles de $\mathcal{F}_{\overline{\omega}}$ par $\mathbf{R}$. On note $\breve{X}$ le champ

$\breve{X} = \overline{X} + \dfrac{\partial}{\partial x_4}$. Le champ $\breve{X}$ est transverse à $\mathcal{F}_{\breve{\omega}}$, il est définissable dans la clôture pfaffienne $\widehat{\mathbf{R}_{\text{an,exp}}}$, jamais vertical et son flot $\breve{\phi}$ est définissable dans la clôture pfaffienne $\widehat{\mathbf{R}_{\text{an,exp}}}$. De plus le flot de $\breve{X}$ échange les plans horizontaux $\{x = cst\}$ et ceux-ci sont transverses aux feuilles de $\breve{\omega}$.

Soit $\Delta = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : |x_1|, |x_2|, |x_3| < D\}$ avec D assez grand pour que le tore $\mathbf{T}^2$ appartienne à Δ. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que tout $t \in]-2\varepsilon, 2\varepsilon[$ et pour tout point $x \in 2\Delta$, l'image $\breve{\phi}(x,t)$ de x par le flot de $\breve{X}$ au temps t existe.

On pose $M = \breve{\phi}(\Delta \times]-\varepsilon, \varepsilon[)$, $\Omega = \breve{\phi}(2\Delta \times]-2\varepsilon, 2\varepsilon[)$ et on note ω l'image de la forme $\breve{\omega}$ par $\breve{\phi}$. Les ensembles M et Ω sont des ouverts de classe C^∞ et définissables dans la clôture pfaffienne $\widehat{\mathbf{R}_{\text{an,exp}}}$ et la forme ω est de classe C^∞ et définissable dans la clôture pfaffienne $\widehat{\mathbf{R}_{\text{an,exp}}}$. L'ouvert M est un ouvert relativement compact de Ω.

On muni l'ouvert $\breve{\phi}(\mathbf{R}^4)$ du système de coordonnées $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ suivant qui trivialise le flot : les coordonnées de l'image $\breve{\phi}(x,t)$ du point $(x, 0)$ de $\mathbf{R}^3 \times \{0\}$ sont

$$y = (y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3, y_4 = t).$$

C'est un système de coordonnées de classe C^∞ et définissable dans la clôture pfaffienne $\widehat{\mathbf{R}_{\text{an,exp}}}$. Dans ce système l'image X du champ $\breve{X}$ est le champ

$$X = \frac{\partial}{\partial y_4}.$$

Dans ces coordonnées on a

$$M = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) : |y_1|, |y_2|, |y_3| < D, |y_4| < \varepsilon\}$$

et

$$\Omega = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) : |y_1|, |y_2|, |y_3| < 2D, |y_4| < 2\varepsilon\}.$$

La forme ω est définie sur Ω, elle est de classe C^∞, intégrable, non singulière et définissable dans la clôture pfaffienne $\widehat{\mathbf{R}_{\text{an,exp}}}$. De plus pour tout $y \in \Omega$ l'hyperplan $\ker(\omega)(y)$ est transverse à l'axe vertical et il n'est jamais horizontal. Ainsi il existe $K > 0$ tel que pour tout $y \in \overline{M}$ l'hyperplan $\ker(\omega)(y)$ est transverse à l'axe vertical, jamais horizontal et c'est le graphe d'une application linéaire K-lipschitzienne.

Par conséquent l'ouvert $M = U_1$ vérifie les points i, ii, iii et iv de la proposition 10 mais la dynamique du feuilletage $\mathcal{F}$ associé à ω n'est pas simple. Il admet des transversales fermées et il possède des feuilles qui ne sont pas fermées dans $M = U_1$.

4 Preuve du théorème 1

La preuve du théorème se fait par récurrence sur la dimension m de M.

1. Si $m = 0$ ou 1 c'est immédiat. Soit $m > 1$. On suppose le résultat prouvé jusqu'au rang $m-1$.

2. Puisque M admet un recouvrement fini par des cylindres ouverts pour la topologie induite et $\mathcal{A}$-définissables (proposition 8) on peut supposer que $M = \mathbf{R}^m$ (proposition 6).

3. Soit $U_1 = \{||x|| > 1\}, V_1 = \{||x|| > \frac{1}{2}\}$, ϕ_1 l'inversion de pôle 0 et qui fixe $\{||x|| = 1\}$. Soit $U_2 = \{||x-(3,0,\ldots,0)|| > 1\}, V_2 = \{||x-(3,0,\ldots,0)|| > \frac{1}{2}\}$, ϕ_2 la translation de vecteur $-(3,0,\ldots,0)$ composée à droite avec ϕ_1. On a $\phi_i(U_i) = \{0 < ||x|| < 1\}$, $\phi_i(V_i) = \{0 < ||x|| < 2\}$ et $U_1 \cup U_2 = \mathbf{R}^m = M$. Par conséquent quitte à transporter $\omega_{|U_i}$ et $\omega_{|V_i}$ par ϕ_i on peut supposer que $M = \{0 < ||x|| < 1\}$ et que ω se prolonge en une forme intégrable et non singulière toujours notée ω définie sur un voisinage de $\overline{M} \setminus \{0\} = \{0 < ||x|| \leq 1\}$.

4. En décomposant M suivant la proposition 10 on peut supposer que M est l'un des ouverts U_i du recouvrement obtenu. On est donc dans la configuration suivante.

– i - L'ouvert M est un cylindre ouvert de $\mathbf{R}^m$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable de la forme
$$M = \{(x,y) : x \in M', \phi(x) < y < \psi(x)\}$$
où M' est un cylindre ouvert de $\mathbf{R}^{m-1}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable.

– ii - La forme ω est définie non singulière et intégrable et $\mathcal{A}$-définisssable sur un voisinage $\mathcal{A}$-définissable Ω de
$$\{(x,y) : x \in M', \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

– iii - Il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$ l'hyperplan $\ker(\omega)(x)$ est transverse à l'axe vertical et c'est le graphe d'une application linéaire K-lipschitzienne.

– iv - Le champ $x \mapsto \ker(\omega)(x)$ est soit partout transverse soit partout tangent au bas $B = \{(x,\phi(x)) : x \in U'\}$ (respectivement au haut $H = \{(x,\psi(x)) : x \in U'\}$) du cylindre M.

Remarquons qu'on a $\overline{M} \cap (M' \times \mathbf{R}) = M \cup B \cup H$.

5. Le feuilletage $\mathcal{F}$ induit par ω sur M se prolonge en un feuilletage de codimension un $\mathcal{F}_\Omega$ sur Ω. Si V est une feuille de $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{F}_\Omega$ alors c'est localement le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}^{m-1}$ dans $\mathbf{R}$. Plus précisément, si $a \in V$ il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de a tel que la composante connexe de $V \cap \mathcal{O}$ qui contient a est le graphe d'une fonction K-lipschitzienne de $\mathbf{R}^{m-1}$ dans $\mathbf{R}$. Si le champ $x \mapsto \ker(\omega)(x)$ est partout transverse à B (respectivement H) il induit sur B (respectivement H) un feuilletage de codimension un $\mathcal{F}_{|B}$ sur B (respectivement $\mathcal{F}_{|H}$ sur H). Si le champ $x \mapsto \ker(\omega)(x)$ est partout tangent à B (respectivement H) alors B (respectivement H) est un morceau de feuille de $\mathcal{F}_\Omega$.

6. Il n'est pas certain que la dynamique du feuilletage $\mathcal{F}_{|B}$ (respectivement $f_{|H}$) soit simple lorsque le champ $x \mapsto \ker(\omega)(x)$ est partout transverse à B (respectivement H). Cependant, d'après l'hypothèse de récurrence et la proposition 5 on peut supposer que si le champ $x \mapsto \ker(\omega)(x)$ est partout transverse à B (respectivement H) alors le feuilletage $\mathcal{F}_{|B}$ (respectivement $\mathcal{F}_{|H}$) induit sur B (respectivement H) est dynamiquement simple : il n'admet pas de transversale fermée et toute feuille est une hypersurface fermée de B (respectivement H) qui sépare B (respectivement H) en deux composantes connexes.

7. Fixons $x_0 \in M'$. Il existe $K_0 > K$, et $y_0 < y_0' \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $\varepsilon_0 > 0$ petit les propriétés suivantes sont vérifiées. On note U_0 la boule $\{x \in \mathbf{R}^{m-1} : ||x - x_0|| < \varepsilon_0\}$ et Ω_0 le cylindre $U_0 \times]y_0, y_0'[$. Alors $\overline{U_0} \subset M'$, $\overline{M} \cap (U_0 \times \mathbf{R}) \subset \Omega_0 \subset \Omega$ et $B \cap (U_0 \times \mathbf{R}), H \cap (U_0 \times \mathbf{R})$ ainsi que les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_{\Omega_0}$ qui rencontrent $\overline{M} \cap (U_0 \times \mathbf{R})$ sont des graphes de fonctions K_0-lipschitziennes définies sur U_0. Ce sont donc des hypersurfaces fermées de Ω_0. De même, les feuilles de $\mathcal{F}_{|B\cap\Omega_0}$ ou de $\mathcal{F}_{|H\cap\Omega_0}$ (en cas de transversalité) sont des hypersurfaces fermées de $B \cap \Omega_0$ ou de $H \cap \Omega_0$. Quitte à réduire un peu ε_0 toute feuille $\mathcal{V}$ du feuilletage $\mathcal{F}_{\Omega_0}$ vérifie l'une des conditions suivantes.

– La feuille $\mathcal{V}$ ne rencontre ni B ni H.
– La feuille $\mathcal{V}$ est égale à $B \cap \Omega_0$ ou à $H \cap \Omega_0$.
– La feuille $\mathcal{V}$ coupe $B \cap \Omega_0$ transversalement le long d'une unique feuille de $\mathcal{F}_{|B\cap\Omega_0}$ et elle ne rencontre pas H.
– La feuille $\mathcal{V}$ coupe $H \cap \Omega_0$ transversalement le long d'une unique feuille de $\mathcal{F}_{|H\cap\Omega_0}$ et elle ne rencontre pas B.

Les deux dernières conditions résultent de la proposition 9 appliquée avec $n = m-1$, en choisissant comme origine l'intersection de B (ou de H) avec la verticale issue de x_0, en paramétrant B (ou H) par M' et en prenant comme fonction g la restriction à B (ou H) d'une intégrale première locale du feuilletage $\mathcal{F}_\Omega$ définie au voisinage de l'origine considérée.

8. Vu les hypothèses faites sur $\mathcal{F}_{|B}$ ou $\mathcal{F}_{|H}$ en cas de transversalité, d'après le modèle des feuilletages $\mathcal{F}_{|B\cap\Omega_0}$ ou de $\mathcal{F}_{|H\cap\Omega_0}$ donné par la proposition 9 on peut aussi supposer en cas de transversalité que toute feuille W du feuilletage $\mathcal{F}_{|B}$ (ou du feuilletage $\mathcal{F}_{|H}$) qui rencontre Ω_0 est telle que $W \cap (B \cap \Omega_0)$ (ou $W \cap (H \cap \Omega_0)$) est connexe et sépare $B \cap \Omega_0$ (ou $H \cap \Omega_0$) en deux composantes connexes exactement.

Dorénavant on note π la projection définie par $\pi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_{m-1})$.

9. Décrivons ce qui se passe au voisinage du point a_0 de B (ou de H) qui se projette sur x_0. Plaçons nous sur B par exemple. Si B est une feuille du feuilletage $\mathcal{F}_\Omega$ induit par ω sur Ω alors il existe un voisinage $\mathcal{W}_0$ de $B \cap \Omega_0$ et un changement de coordonnées (pas nécessairement $\mathcal{A}$-définissable) dans lesquelles $\mathcal{W}_0 = \mathbf{R}^m$, $B \cap \Omega_0 = \{x_m = 0\}$, $M \cap \mathcal{W}_0 = \{x_m > 0\}$ et le feuilletage induit par ω sur $M \cap \mathcal{W}_0$ est le feuilletage par hyperplans horizontaux. Supposons B transverse au champ

$x \mapsto \ker(\omega)(x)$. Soit $a \in B \cap \Omega_0$. D'après l'étape 8, la feuille $\mathcal{W}_a$ du feuilletage $\mathcal{F}_{|B\cap\Omega_0}$ qui passe par a est exactement la trace sur $B\cap\Omega_0$ de la feuille W_a de $\mathcal{F}_{|B}$ qui passe par a. De plus $\mathcal{W}_a$ sépare $B\cap\Omega_0$ en deux composantes connexe $C_+(a)$ et $C_-(a)$ qui sont incluses dans $B \setminus W_a$. On pose $C'_+(a) = \pi(C_+(a))$ et $C'_-(a) = \pi(C_-(a))$. Les ensembles $C_+(a)$ et $C_-(a)$ sont des graphes d'applications définies au dessus de $C'_+(a)$ et $C'_-(a)$. Il existe une et une seule feuille $\mathcal{V}_a$ de $\mathcal{F}_{|M\cap\Omega_0}$ qui contient a (ou un quelconque point de $\mathcal{W}_a$) dans son adhérence. Quitte à permuter $C_+(a)$ et $C_-(a)$ cette feuille $\mathcal{V}_a$ est le graphe d'une application définie sur $C'_+(a)$. La remarque cruciale est la suivante. La réunion de $\mathcal{V}_a$, de $\mathcal{W}_a$ et de $C_-(a)$ est le graphe d'une application continue définie au dessus de la projection U_0 de Ω_0 sur M'. On a bien sûr les mêmes conclusions si $a \in H\cap\Omega_0$.

9. Finalement si $\mathcal{V}$ est une feuille de $\mathcal{F}_{|M\cap\Omega_0}$ alors elle vérifie l'une des conditions suivantes.

- C'est une feuille de $\mathcal{F}_{|\Omega_0}$ et c'est le graphe d'une application définie sur U_0.
- Il existe un point a de $B\cap\Omega_0$ qui est dans l'adhérence de $\mathcal{V}$ et alors $\mathcal{V} = \mathcal{V}_a$ et $\mathcal{V}_a \cup \mathcal{W}_a \cup C_-(a)$ est le graphe d'une application définie sur U_0.
- Il existe un point a de $H\cap\Omega_0$ qui est dans l'adhérence de V et alors $\mathcal{V} = \mathcal{V}_a$ et $\mathcal{V}_a \cup \mathcal{W}_a \cup C_-(a)$ est le graphe d'une application définie sur U_0.

10. Soit V une feuille de $\mathcal{F}$ et soit $a \in B$. On dit que a est dans l'adhérence directe de V s'il existe x_0, Ω_0 et a_0 comme précédemment tels que la feuille $\mathcal{V}_a$ précédente est dans V. On suppose que a est dans l'adhérence directe de V. Soit W la feuille de $\mathcal{F}_{|B}$ qui contient $\mathcal{W}_a$. Puisque le feuilletage $\mathcal{F}_{|B}$ est dynamiquement simple, W est une hypersurface fermée de B qui sépare B en deux composantes connexes. D'après l'étape 8, l'une d'elles, notée $C_+(W)$, contient $C_+(a)$ et l'autre, notée $C_-(W)$, contient $C_-(a)$. Alors tout point a' de W est dans l'adhérence directe de V et $C_+(a')$ est inclus dans $C_+(W)$ alors que $C_-(a')$ est inclus dans $C_-(W)$. On dit que W adhère directement à V. On a des définitions et des conclusions analogues pour H au lieu de B.

11. Considérons maintenant V comme une variété abstraite et non plus comme une feuille de M. On note $j : V \to M$ l'immersion de V dans M. On va prolonger cette immersion différentiable et injective en une immersion continue et non nécessairement injective $\tilde{j}$ définie sur $\tilde{V}$ variété topologique connexe à valeurs dans $\overline{M} \cap (M' \times \mathbf{R})$ telle que la composée de $\tilde{j}$ avec la projection π soit un revêtement de base M'. Les W de B ou H qui adhèrent directement à V sont en nombre au plus dénombrable. Pour tout W on colle $C_-(W)$ à V le long de W. C'est bien sur un collage abstrait : il faut dans cette opération considérer les $C_-(W)$ disjoints, c'est à dire oublier un instant qu'ils sont dans $\overline{M} \cap (M' \times \mathbf{R})$ et les voir comme des variétés topologiques abstraites. Par ces collages en nombre au plus dénombrable on obtient une variété abstraite $\tilde{V}$.

12. Décrivons plus précisément $\tilde{V}$ et sa topologie. Indexons par un sous-ensemble I de $\mathbf{N}$ les W de B et H qui sont dans l'adhérence directe de V : $(W_i)_{i\in I}$.

D'un point de vue ensembliste, $\tilde{V}$ est l'union disjointe de V, des $W_i, i \in I$ et des $C_-(W_i), i \in I$. Soit $x_0 \in M'$ et $\varepsilon_0 > 0$, Ω_0 et U_0 comme dans l'étape 7. Soit $\tilde{\alpha}$ un point de $\tilde{V}$ tel que $\tilde{j}(\tilde{\alpha}) = \alpha \in \Omega_0$. Trois cas sont à considérer.

– Le point α est dans M et la composante connexe V_0 de $V \cap \Omega_0$ qui contient α est un graphe au dessus de U_0. Alors $\tilde{j}^{-1}(V_0)$ est un voisinage ouvert de $\tilde{\alpha}$ dans $\tilde{V}$ et la restriction de $\pi \circ \tilde{j}$ à $\tilde{j}^{-1}(V_0)$ sur U_0 est un homéomorphisme.
– Il existe $i \in I$ et $a_i \in W_i \cap \Omega_0$ tels que $\tilde{\alpha}$ provient du collage de W_i. Dans ce cas l'ensemble $(\mathcal{V}_{a_i} \cup \mathcal{W}_{a_i} \cup C_-(a_i))$ vu comme sous-ensemble de $\tilde{V}$ est un voisinage ouvert de $\tilde{\alpha}$ dans $\tilde{V}$ et la restriction à cet ouvert de $\pi \circ \tilde{j}$ est un homéomorphisme sur U_0.
– Il existe $i \in I$ tel que $\tilde{\alpha}_0$ provient du collage de $C_-(W_i)$ et $W_i \cap \Omega_0 = \emptyset$. Dans ce cas $U_0 \subset C_-(W_i)$ et U_0 vu comme sous-ensemble de $\tilde{V}$ est un voisinage ouvert de $\tilde{\alpha}_0$ dans $\tilde{V}$ et la restriction à cet ouvert de $\pi \circ \tilde{j}$ est un homéomorphisme sur son image U_0.

Ces cas donnent une famille d'ouverts connexes disjoints qui recouvrent $\tilde{j}^{-1}(\Omega_0)$.

13. L'application $\tilde{j}$ envoie continument $\tilde{V}$ dans $\overline{M} \cap (M' \times \mathbf{R})$. A priori elle n'est pas nécessairement injective. Par construction l'application $\pi \circ \tilde{j}$ est un revêtement de base M'. En effet si x_0 est dans M' alors $(\pi \circ \tilde{j})^{-1}(U_0)$ (avec les notations précédentes) est l'union disjointe et dénombrable d'ouverts qui sont des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_{|\Omega_0}$, des ensembles du type $(\mathcal{V}_{a_i} \cup \mathcal{W}_{a_i} \cup C_-(a_i))$ et des exemplaires disjoints de U_0. De plus la restriction de $\pi \circ \tilde{j}$ à chacun de ces ouverts est un homéomorphisme sur U_0.

14. Puisque $\tilde{V}$ est connexe alors que M' est simplement connexe le revêtement $\pi \circ \tilde{j}$ est un homémorphisme (voir la première observation topologique de la partie 2). Ceci implique que la restriction à V est injective et que $\tilde{j}(\tilde{V})$ est fermé relativement à $M \cup B \cup H$. Ainsi V vu à nouveau comme feuille est le graphe d'une application continue définie sur un ouvert V' de M' et V est fermé relativement à M. C'est donc une sous-variété fermée de M. Puisque M est difféomorphe à $\mathbf{R}^m$, la feuille V sépare M en deux composantes connexes et elle est de Rolle (voir la deuxième et la troisième observations topologiques de la partie 2). Puisque ces conclusions valent pour toute feuille, le feuilletage induit par ω sur M est donc un feuilletage dynamiquement simple : il n'admet pas de transversale fermée et toute feuille est une hypersurface fermée de M qui sépare M en deux composantes connexes. •

5 Annexe : preuve de la proposition 10

On va montrer par une récurrence descendante sur la dimension d que si Z est un sous-ensemble inclus dans M, $\mathcal{A}$-définissable de dimension d alors il existe $K > 0$ et $Z' \subset Z$ $\mathcal{A}$-définissable et de dimension au plus $d-1$ tel que $Z \setminus Z'$ peut être recouvert d'ouverts qui vérifient les points ii, iii et iv de la proposition 10.

Si $d = m$, on peut supposer que $Z = M$. Soit $K_1 > 0$. Si $i = 1,\dots,m$ on note M_i l'ensemble des $x \in M$ tels que $\ker(\omega)(x)$ soit le graphe d'une application linéaire strictement K_1-lipschitzienne des variables $(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_m)$. Les M_i sont des ouverts $\mathcal{A}$-définissables inclus dans M. Quitte à choisir K_1 assez grand, on a $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$. Fixons $i \in \{1,\dots,n\}$. Permutons les coordonnées x_i et x_m. On fait une décomposition cylindrique de $\mathbf{R}^m$ adaptée à M_i et à $\{0\}$ et on ne retient que les cylindres ouverts $M_{i,1},\dots,M_{i,r_i}$. Soit $M_{i,j}$ l'un d'eux et $M'_{i,j}$ sa base :

$$M_{i,j} = \{(x,y) : x \in M'_{i,j}, \phi_{i,j}(x) < y < \psi_{i,j}(x)\}$$

On pose

$$B_{i,j} = \{(x,y) : x \in M'_{i,j}, y = \phi_{i,j}(x)\}$$

et

$$H_{i,j} = \{(x,y) : x \in M'_{i,j}, y = \psi_{i,j}(x)\}.$$

Les ensembles $B_{i,j}$ et $H_{i,j}$ sont dans l'adhérence $\overline{M}$ de M. Par conséquent la forme ω est définie sur $B_{i,j}$ et $H_{i,j}$ car elle est définie sur $\overline{M} \setminus \{0\}$ et $B_{i,j}$ et $H_{i,j}$ sont des cylindres de dimension $m-1$ d'une décomposition de $\mathbf{R}^n$ adaptée à 0 et à M. On note $TB_{i,j}$ et $TH_{i,j}$ leurs fibrés tangents. On fait une décomposition cylindrique de $M'_{i,j}$ adapté à

$$\{x \in M'_{i,j} : T_{(x,\phi_{i,j}(x))}B_{i,j} \subset \ker(\omega)(x,\phi_{i,j}(x))\}$$

et à

$$\{x \in M'_{i,j} : T_{(x,\psi_{i,j}(x))}H_{i,j} \subset \ker(\omega)(x,\psi_{i,j}(x))\}$$

et on ne retient que les cylindres ouverts $M'_{i,j,1},\dots,M'_{i,j,r_{i,j}}$. Pour chaque $k = 1,\dots,r_{i,j}$ on pose

$$M_{i,j,k} = \{(x,y) \in M_{i,j} : x \in M'_{i,j,k}\}.$$

Les $M_{i,j,k}$ ainsi construits vérifient ii, iii et iv de la proposition avec tout $K > K_1$). De plus la réunion des $M_{i,j,k}$ est dense dans M et $M \setminus (\bigcup_{i,j,k} M_{i,j,k})$ est un sous-ensemble $\mathcal{A}$-définissable de M de dimension au plus $m-1$. Le cas $d = m$ est résolu.

Soit $0 < d < m$ et considérons $Z \subset M$, $\mathcal{A}$-définissable de dimension d. D'après la proposition 7 on peut supposer que Z est une sous-variété différentielle de dimension d, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable. Soit $K_2 > 0$. Si $\tilde{x} = (x_1,\dots,x_m)$ est un système de coordonnées orthogonales de $\mathbf{R}^m$ on note $Z_{\tilde{x}}$ l'ensemble des $x \in Z$ tels que $\ker(\omega)(x)$ soit le graphe d'une application linéaire strictement K_2-lipschitzienne des variables $(x_1,\dots,x_{m-1})$ et le plan tangent et tels que T_xZ soit le graphe d'une application linéaire strictement K_2-lipschitzienne des variables $(x_1,\dots,x_d)$. S'il n'est pas vide, l'ensemble $Z_{\tilde{x}}$ est $\mathcal{A}$-définissable et ouvert dans

Z. C'est donc une sous-variété différentielle de dimension $d < m-1$, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable. On note aussi $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ l'ensemble des $x \in M$ tels que $\ker(\omega)(x)$ soit le graphe d'une application linéaire strictement K_2-lipschitzienne des variables $(x_1, \dots, x_{m-1})$. C'est un ouvert $\mathcal{A}$-définissable de M qui contient $Z_{\tilde{x}}$. Si K_2 est assez grand on peut choisir un nombre fini de ces systèmes de coordonnées $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l$ de telle sorte que $Z_1 = Z_{\tilde{x}_1}, \dots, Z_l = Z_{\tilde{x}_l}$ recouvrent Z et $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_{\tilde{x}_1}, \dots, \tilde{M}_l = \tilde{M}_{\tilde{x}_l}$ recouvrent M. On peut supposer que $Z = Z_1$, $M = \tilde{M}_1$ et que $\tilde{x}_1 = (x_1, \dots, x_m)$. D'après la proposition 7 on peut supposer que Z est un cylindre $\mathcal{A}$-définissable de classe C^k de la forme

$$Z = \{(x, F(x)) : x \in D'\}$$

où $D' \subset \mathbf{R}^d$ est un cylindre de classe C^k, $\mathcal{A}$-définissable et $F = (F_{d+1}, \dots, F_m)$ est une application définie sur D', de classe C^k, strictement K_2-lipschitzienne et $\mathcal{A}$-définissable.

Si $x = (x_1, \dots, x_m) \in D'$ on pose

$$\delta(x) = \max\{\delta : \forall h = (h_{d+1}, \dots, h_m),\ \sup |h_i| < \delta \Rightarrow (x, F(x) + h) \in M\}.$$

La fonction δ est $\mathcal{A}$-définissable. D'après la proposition 7 il existe des cylindres $D'_1, \dots, D'_r \subset D'$, de dimension d, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissables tels que

- $D' \setminus (D'_1 \cup \dots \cup D'_r)$ est de dimension au plus $d-1$
- La restriction de δ à chaque D'_i est de classe C^k et définisssable dans $\mathcal{A}$.

On peut donc supposer que $D' = D'_1$ et

$$Z = \{(x, F(x)) : x \in D' = D'_1\}.$$

On pose

$$\Gamma' = \{(x, x_{d+1}, \dots, x_{m-1}) : x \in D', \sup_{j=d+1,\dots,m-1} |x_j - F_j(x)| < \delta(x)\}$$

et

$$\Gamma = \{x \in M : (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \Gamma', x_m = F_m(x_1, \dots, x_d)\}.$$

Ce sont des cylindres de dimension $m-1$, de classe C^k, $\mathcal{A}$-définissables et Γ est inclus dans M et contient Z. On considère aussi

$$\Delta = \{x + (0, \dots, 0, h) : x \in \Gamma, |h| < \delta(x)\}.$$

C'est un cylindre de dimension m, de classe C^k, $\mathcal{A}$-définissable et inclus dans M. Si $\lambda > 0$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbf{R}^m$ avec $||\mu|| < 1$ on définit la fonction $\Theta_{\lambda,\mu}$ sur Γ en posant pour $x \in \Gamma$, $\Theta_{\lambda,\mu}(x) = \lambda(1 + ||x - \mu||^2)\delta(x)$. C'est une fonction $\mathcal{A}$-définissable de classe C^k. On pose

$$\Delta_{\lambda,\mu} = \{x + (0, \dots, 0, h) : x \in \Gamma, |h| < \Theta_{\lambda,\mu}(x)\},$$

$$B_{\lambda,\mu} = \{x - (0,\dots,0,\Theta_{\lambda,\mu}(x)) : x \in \Gamma\},$$

$$H_{\lambda,\mu} = \{x + (0,\dots,0,\Theta_{\lambda,\mu}(x)) : x \in \Gamma\}.$$

Il existe λ_0 tel que si $0 < \lambda < \lambda_0$ alors $\Theta_{\lambda,\mu}(x) < \delta(x)$ si $x \in \Gamma$. Les ensembles $\Delta_{\lambda,\mu}, B_{\lambda,\mu}$ et $H_{\lambda,\mu}$ sont alors des cylindres $\mathcal{A}$-définissables de classe C^k inclus dans M. On déduit du théorème de transversalité [Th] (voir [DNF]) et de la o-minimalité de la structure $\mathcal{A}$ (proposition 4) que pour presque tout (λ,μ) et pour tous les points x de Γ sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux formant un ensemble $F_{\lambda,\mu}$, le plan tangent

$$T_{x-(0,\dots,0,\Theta_{\lambda,\mu}(x))}B_{\lambda,\mu}$$

et le noyau

$$\ker(\omega)(x - (0,\dots,0,\Theta_{\lambda,\mu}(x,F_m(x)))$$

ainsi que le plan tangent

$$T_{x+(0,\dots,0,\Theta_{\lambda,\mu}(x))}H_{\lambda,\mu}$$

et le noyau

$$\ker(\omega)(x + (0,\dots,0,\Theta_{\lambda,\mu}(x,F_m(x))$$

sont transverses. Fixons λ et μ. D'après la proposition 8 la différence $\Gamma \setminus F_{\lambda,\mu}$ est la réunion d'un nombre fini de cylindres ouverts de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissables $\Gamma_1,\dots,\Gamma_s$. Pour chaque $i \in \{1,\dots,s\}$ on pose

$$\Delta_{\lambda,\mu,i} = \{x + (0,\dots,0,h) : x \in \Gamma_i, |h| < \Theta_{\lambda,\mu}(x)\}.$$

Les ensembles $\Delta_{\lambda,\mu,i}$ recouvrent $Z \setminus F_{\lambda,\mu}$ et ce sont des cylindres qui vérifient les points ii, iii et iv de la proposition avec tout $K > K_2$ et l'ensemble $Z' = F_{\lambda,\mu} \cap Z$ est fini donc de dimension strictement plus petite que celle de Z.

Il reste à considérer le cas où Z est de dimension 0. C'est un ensemble fini de points. On peut supposer que c'est un unique point x^0. Il existe un système de coordonnées orthogonales dans lesquelles $x^0 = 0$ et $\ker(\omega)(0)$ est transverse à l'axe vertical et au plan horizontal dx_m. Dès que $\varepsilon > 0$ est petit le polydisque $\{x \in \mathbf{R}^m : |x_1|,\dots,|x_m| < \varepsilon\}$ vérifie les points ii, iii et iv de la proposition 10 avec tout $K > 0$ assez grand. •

Bibliographie

[AHV] J.M. Aroca, H. Hironaka et J.L. Vicente, Introduction to the theory of infinitely near singular points. The theory of the maximal contact. Desingularization theorems. Mem. Mat. Inst. Jorge Juan, 28, 29, 30. Madrid CSIC (1977)

[BCR] J.Bochnak, M. Coste et F. Roy, Géométrie algébrique réelle, Springer-Verlag 87 (1986)

[BR] R. Benedetti et J.-J. Risler, Real algeabric and semi-algebraic sets, Hermann (1990)

[Ca] F. Cano, Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three, Ann. of Math. (2) 160, 3, 907-1011 (2004)

[Ch] F. Chazal, Structure locale et globale des feuilletages de Rolle, un théorème de fibration, Ann. Fourier 48, 553-592 (1998)

[CLN] C. Camacho et A. Lins Neto, Teoria geométrica das folheações, Projeto Euclides , 9, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1979)

[vdD] L. van den Dries, Tame Topology and O-minimal Structures, Cambridge (1998)

[DM] L. van den Dries, C. Miller, Geometric categories and o-minimal structures, Duke Math. J., 84, 2, 497-540 (1996)

[DMM] L. van den Dries, A. Macintyre et D. Marker, The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation, Ann. of Maths, 140, 183-205 (1994)

[DNF] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko, Géométrie contemporaine, Editions MIR (1982)

[ER] C. Ehresmann et G. Reeb, Sur les champs d'éléments de contact de dimension p completement intégrables dans une variété continuement différentiable V_n, CRAS 218, 955-957 (1944)

[Ga] A.M. Gabrielov, Projections of semi-analytic sets, Funct. Anal. Appl., 2, 282-291 (1968)

[G1] C. Godbillon, Feuilletages. Études géométriques, Progress in Mathematics, 98, Birkhäuser Verlag, Basel (1991)

[G2] C. Godbillon, Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann (1969)

[H1] A. Haefliger, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comment. Math. Helv. 32, 248-329 (1958)

[H2] A. Haefliger, Naissance des feuilletages, d'Ehresmann-Reeb à Novikov, dans Géométrie au XX^e siècle - Histoire et horizons, Hermann (2005)

[Kh] A. G. Khovanskii, Real analytic varieties with the finitness property and complex abelian integrals, Funct. Anal. and Appl., 18, 119-127 (1984)

[Ku] N. kuiper, C^1-equivalence of functions near isolated critical points. Symposium on Infinite-Dimensional Topology (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1967), 199-218. Ann. of Math. Studies, No. 69 (1972)

[L] J.-M. Lion, Partitions normales de Lojasiewicz et hypersurfaces pfaffiennes, CRAS 311, 453-456 (1990)

[Ł] S. Łojasiewicz, Ensembles semi-analytiques, preprint IHES (1965)

[LdM] S. López de Medrano, A splitting lemma for C^r functions, $r \geq 2$. Singularity theory (Trieste, 1991), 444-450, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995

[MR] R. Moussu et C.A. Roche, Théorèmes de finitude uniforme pour les variétés pfaffiennes de Rolle, Ann. Fourier 42, 393-420 (1992)

[M] J.R. Munkres, Elements of Algebraic Topology, Adisson Wesley (1984)

[P] D. Panazzolo, Resolution of singularities of real analytic vector fields in dimension three, Acta Math 197, 167-289 (2006)

[R] C.A. Roche, Sur les variétés pfaffiennes de Rolle, Habilitation, Université de Bourgogne (1993)

[RSS] J.-P. Rolin, F. Sanz et R. Schäfke, Quasianalytic solutions of differential equations and o-minimal structures, preprint (2005)

[RSW] J.-P. Rolin, P. Speissegger et A. Wilkie, Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality, J. Amer. Math. Soc. 16, 4, 751-777 (2003)

[S] P. Speissegger, The pfaffian closure of an o-minimal structure, J. Reine Angew. Math. 508, 189-211 (1999)

[Te] B. Teissier, Tame and stratified objects, dans Geometric Galois actions 1, 231-242, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press (1997)

[Th] R. Thom, Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier, 6, 43-87 (1956)

[Wh] H. Whitney, Tangents to analytic varieties, Ann. of Maths, 81, 496-549 (1965)

[Wi] A. Wilkie, A general theorem of the complement and some new o-minimal structures, Selecta. Math. 5, 189-211 (1999)